Γεωμετρικά υποδείγματα συναρτήσεων .

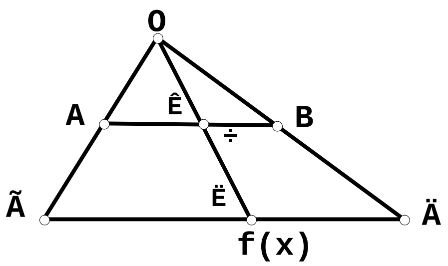
Ιωάννης Π. Πλατάρος
Μαθηματικός , Καπετάν Κρόμπα 37 , Τ.Κ. 24 200 ΜΕΣΣΗΝΗ
ηλ./ταχ. Plataros@sch.gr

Περίληψη
Κάποια απλά υποδείγματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούν να δείξουν την ύπαρξη απεικονίσεων μεταξύ ευθ. τμημάτων, ευθειών , ημιευθιών , τόξων κύκλων κ.τ.λ. οι οποίες έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον καθ΄ εαυτές και επάγουν σε αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις. Έτσι , συνδέεται περισσότερο η Ευκλείδεια Γεωμετρία και με τις συναρτήσεις, πράγμα που συμβάλει στην ανάδειξη του ενιαίου της συνέχειας και της συνεκτικότητας των μαθηματικών κλάδων.

Εισαγωγή
Στο Λύκειο, υπάρχουν κλασικά προβλήματα , όπως. π.χ. μεγίστων και ελαχίστων στα εμβαδά , τα οποία μπορούν να επιλυθούν με γεωμετρικές, αλγεβρικές ή και αναλυτικές μεθόδους και να φανεί η ενότητα των τριών κλάδων των μαθηματικών , οι διαφορές τους καθώς και τα πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα κάθε μιας. Π.χ. το πρόβλημα της εύρεσης του παραλληλογράμμου με μέγιστο εμβαδόν, από όλα όσα έχουν σταθερή περίμετρο, μπορεί να επιλυθεί και με τις τρεις μεθόδους. Ωστόσο , ένα τμήμα ύλης που θα συνέδεε την κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία απ΄ ευθείας με τις απεικονίσεις και ιδία τις συναρτήσεις δεν υπάρχει στα βιβλία της Μέσης εκπαίδευσης .Αν εξαιρέσουμε τις κλασικές απεικονίσεις «συμμετρία ως προς κέντρο» , «συμμετρία ως προς σημείο» «στροφή» και «μεταφορά» (όπου κι αυτές παρουσιάζονται χωρίς ιδιαίτερες επεκτάσεις και εφαρμογές) κάτι άλλο δεν υπάρχει και μια τέτοια απόπειρα θα κάνουμε με την παρούσα εργασία.

Πρόβλημα Ι.
Να βρεθεί συνάρτηση $f:[a,\beta]\to[\gamma,\delta]$ ***η οποία να είναι «1-1» και «επί»***

Στο παρακάτω σχήμα [1] έχω $AB//\Gamma\Delta$ και φαίνεται , ότι κάθε σημείο του ευθ. τμήματος ΑΒ απεικονίζεται ένα και μόνο ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ και αντιστρόφως. Έτσι έχω μια «1-1» και «επί» απεικόνιση

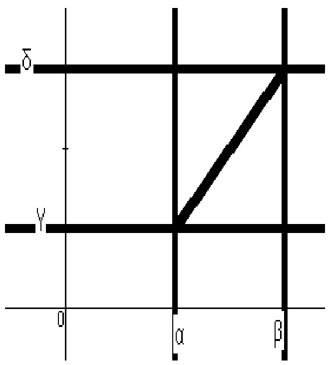


$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\, 1.$

του ΑΒ στο ΓΔ. Αν θεωρήσω το ΑΒ ως το [α,β] και το ΓΔ ως [γ,δ] , τότε από τα όμοια τρίγωνα ΟΑΚ &ΟΓΛ έχω $\frac{ΟΑ}{ΟΓ}=\frac{ΑΚ}{ΓΛ}=\frac{\chi-\alpha}{f(x)-\gamma}$ (1)

Από τα όμοια τρίγωνα ΟΑΒ & ΟΓΔ , έχω: $\frac{ΟΑ}{ΟΓ}=\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ (2) Από (1)&(2) κάνοντας τις πράξεις , έχω τελικά ότι $f(x)=\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}(\chi-\alpha)+\gamma$

$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 2.



Χωρίς το γεωμετρικό πρότυπο των ομοίων τριγώνων αλλά στο πεδίο γραφικής παράστασης, θα μπορούσαμε να δούμε την εξίσωση της διαγωνίου ως μία λύση στο πρόβλημα και να την βρούμε ως τμήμα ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία (α,γ) και (β,δ) και η οποία ως γνησίως μονότονη είναι «1-1» και «επί» . Αντί του γραφήματος της διαγωνίου, θα μπορούσε να είναι το γράφημα οποιασδήποτε «1-1» συνάρτησης (συνεχούς ή μη) που διέρχεται από τα προηγούμενα σημεία ή τα σημεία (α,δ) και (β,γ).

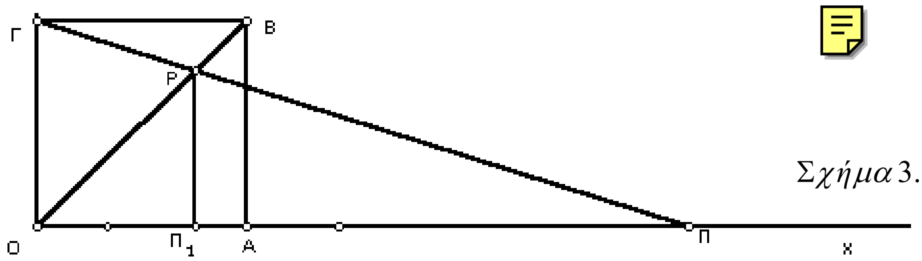
Έτσι, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι η δεύτερη θεώρηση υπερκαλύπτει το αρχικό γεωμετρικό πρότυπο, όμως, το αρχικό προσφέρεται διδακτικά για τα εξής:

- Δείχνει την έννοια της απεικόνισης ως φυσική επέκταση της συνάρτησης σε μη αριθμητικά σύνολα
- Δείχνει, ότι το πλήθος των σημείων όλων των ευθυγράμμων τμημάτων είναι το ίδιο , πράγμα μη προφανές και που δεν προκύπτει διαισθητικά , μιας και στα απειροσύνολα έχουν άλλους νόμους από αυτούς των πεπερασμένων που αντιλαμβάνονται συνήθως οι άνθρωποι. Εννοείται ότι πρέπει να έχει γίνει μια γενικότερη νύξη για το πώς η ισοπληθικότητα μεταξύ δύο συνόλων πεπερασμένων ή απείρων ουσιαστικά φανερώνεται από μια «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ τους.
- Με ένα δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό που έχει κίνηση , όπως είναι το Cabri ή το Sketchpad μπορούμε να δείξουμε πάρα πολύ καλά, ότι καθώς το χ διαγράφει το ΑΒ, η εικόνα του *f(x)* διαγράφει το ΒΓ. Παράλληλα μπορεί να γίνει και η γραφική παράσταση του μήκους ΓΛ*(:=f(x)*) ως συνάρτηση του μήκους ΓΔ(:=x) που είναι ευθ. τμήμα.

Πρόβλημα ΙΙ.

Να βρεθεί συνάρτηση $f:[a,\beta)\to[a,+\infty)$ ***που να είναι «1-1» και «επί»***

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η απεικόνιση του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ στην ημιευθεία Οχ . [2]



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\, 3.$

Στο τυχόν σημείο Π_1 του ΟΑ , υψώνουμε κάθετο, η οποία τέμνει την διαγώνιο του τετραγώνου ΟΑΒΓ στο Ρ. Η προέκταση της ΓΡ , τέμνει την Οχ στο Π , που είναι η εικόνα του Π_1.

Αν τώρα ταυτίσομε το ΟΑ με το [α,β) , την Οχ με το [α,+∞) , το Π_1 με το x και το Π με το *f(x)* , τότε από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΟΠΓ και Π_1ΠΡ , έχομε την ισότητα λόγων

$$\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΠ}-\text{ΟΠ}_1}=\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΡΠ}_1}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{f(x)-x}=\frac{\beta-\alpha}{x} \qquad (1)$$

Από την (1) τελικά παίρνουμε ότι $f(x)=\dfrac{(\beta-\alpha)x}{\beta-\alpha-x}$ που είναι η ζητούμενη αναλυτική έκφραση .

Ας δούμε τώρα τα πιθανά οφέλη της εφαρμογής αυτής:

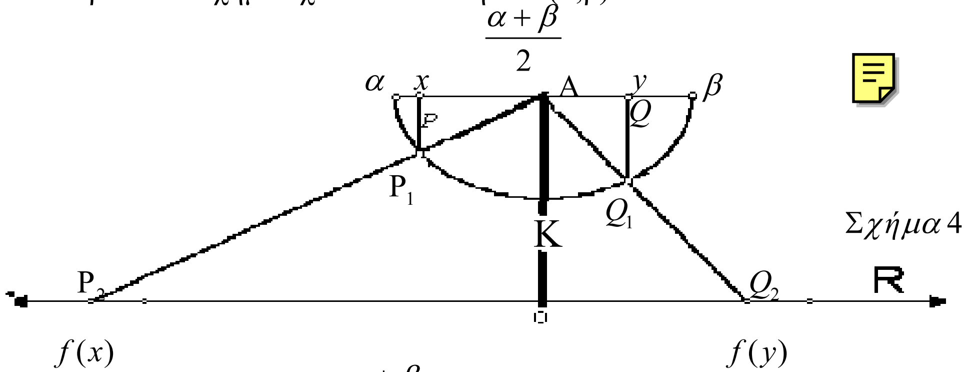
- Η δικαιολόγηση του γιατί έχουμε απεικόνιση μέσω αυτής της διαδικασίας. Γεωμετρικά είναι ίσως τετριμμένη, (δύο ευθείες του επιπέδου όταν δεν είναι παράλληλες τέμνονται σε μοναδικό σημείο) αλλά συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της απεικόνισης.
- Φανερώνει στους μαθητές το εκπληκτικό και πέραν της συνήθους διαισθήσεως αποτέλεσμα, ότι το πεπερασμένου μήκους ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ , έχει τα ίδια σημεία με την απείρου μήκους ημιευθεία.
- Με χρήση των Sketchpad ή Cabri , εκτός του να δειχθεί η απεικόνιση και η αντίστοιχη συνάρτηση με δυναμικό τρόπο, μπορεί να δειχθεί και

ότι το όριο του χ τείνοντος στο α , είναι το $+\infty$, κατ΄ απολύτως εποπτικό τρόπο. Δηλ. ακριβώς στο α έχω παραλληλία και άρα δεν έχω εικόνα του χ, αλλά οσοδήποτε κοντά στο α , έχω εικόνα , η οποία γίνεται οσοδήποτε μεγάλη.

Πρόβλημα ΙΙΙ.

Να βρεθεί συνάρτηση $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ ***που να είναι «1-1» και «επί»*** [3],[4]

Στο παρακάτω σχήμα έχω απεικόνιση του (α,β) στο $\mathbb{R}$:



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 4.

Το μέσον του τμήματος $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ απεικονίζεται στο 0 , τα δε τυχαία x και y στα *f(x)* , *f(y)* αντιστοίχως. Από τα όμοια τρίγωνα APP_1 και P_2OA έχω τους λόγους μηκών των αντιστοίχως τμημάτων:

$$\frac{-f(x)}{\dfrac{a+\beta}{2}-\chi}=\frac{K}{\sqrt{\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\chi\right)^2}},$$

απ΄ όπου παίρνω την αναλυτική έκφραση της *f* *δηλ.* $f(x)=\dfrac{K\left(\chi-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sqrt{(\chi-\alpha)(\beta-\chi)}}$ (*)

Πιθανά οφέλη της εφαρμογής θα μπορούσαν να είναι:

- Η εκπληκτική ανακάλυψη ότι τα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος και μιας ευθείας είναι ισοπληθικά.
- Το ίδιο το γεγονός της αλγοριθμικής κατασκευής οικογένειας συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ανοικτό και πεπερασμένο διάστημα και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Η κατασκευή του σχήματος σε περιβάλλον Cabri ή Sketchpad, θα δείξει -όπως και προηγουμένως- εξαιρετικά εποπτικά την

απεικόνιση, την αντίστοιχη συνάρτηση και ακόμη ότι η f απειρίζεται θετικά ή αρνητικά καθώς το χ τείνει στο β ή στο α , αντιστοίχως.

Μία γενίκευση

Αν θελήσει κάποιος να προβεί σε γενικεύσεις και αντί ημικυκλίου στο Σχήμα.4 θέσει μια άλλη γνωστή συνάρτηση με τα ίδια άκρα και στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε θα πάρει μια άλλη συνάρτηση . Για να είναι η νέα συνάρτηση «1-1» χρειάζονται επί πλέον συνθήκες.

Στο Σχήμα 3 , αντί της διαγωνίου ΟΒ , θα μπορούσα να θέσει το γράφημα μιας γν. αύξουσας συνεχούς συνάρτησης στο [α,β) με τα ίδια άκρα

Κάτι ανάλογο μπορεί να γίνει και στο Σχήμα1 , αν αντικατασταθεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με γράφημα συνάρτησης ή όταν ΑΒ $\nparallel$ ΓΔ και να διερευνηθούν ανάλογα ερωτήματα. (Τα δυναμικά λογισμικά προσφέρονται για σχετικό πειραματισμό)

Συμπεράσματα

Τα τρία προβλήματα που παραθέσαμε, αναδεικνύουν μια σύνδεση σε δύο περιοχές των μαθηματικών , όπως είναι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των συναρτήσεων. Αυτή η ενότητα είναι προφανής όταν μεσολαβεί η Αναλυτική Γεωμετρία. Αλλά. το πώς π.χ με την βοήθεια ομοίων τριγώνων βρίσκω συνάρτηση με επιθυμητές ιδιότητες , δεν μπορεί να προκύψει άμεσα από την ύλη του Λυκείου. Επίσης η χρήση δυναμικών εκπαιδευτικών λογισμικών στην παρουσίαση των εφαρμογών αυτών μπορεί να αποδώσει εποπτικότερα την έννοια της σύγκλισης , αλλά και να αναδείξει παράπλευρες έννοιες, όπως του περιορισμού συνάρτησης και του εφικτού ή όχι της συνεχούς επέκτασης συνάρτησης (π.χ. όταν τα ανοικτά διαστήματα των προβλημάτων τα θεωρήσουμε ως κλειστά)

Μια σοβαρή γενικότερη πιθανή ωφέλεια που προσλαμβάνει ο μαθητής, είναι η διεύρυνση του πλαισίου (contex) αναφοράς των συναρτήσεων μέσω των τριών αυτών προβλημάτων.

Αναφορές:

[1] **Vilenkin Yak. Naum** : *«Αναζητώντας το άπειρο»* Εκδόσεις Κάτοπτρο σελ. 102-103

[2] **Morris Kline** *«Τα Μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό»* Τ.Β΄ εκδόσεις «Κώδικας» σελ. 259

[3] **Δρόσος Κώστας Α**. *«Εισαγωγή στην Μαθηματική Σκέψη»* Τόμος $1^{ος}$ Μαθηματικές Περιηγήσεις –Τμήμα Μαθηματικών Παν. Πατρών.

[4] **Rucker Rudy** : *«Το άπειρο και ο νους»* Παν. Εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 1999 σελ. 269-270